4.1 SCHWARZSILDOV ALEBO GRAVITAČNÝ POLOMER

Označuje sa r_s (pre Schwarzsildov polomer) a r_G (pre gravitačný polomer) a predstavuje polomer gule, do ktorej keď stlačíme akékoľvek teleso, tak sa z neho stane čierna diera. Napríklad, ak by sme sme chceli spraviť zo zeme čiernu dieru, museli by sme všetku jej hmotu stlačiť do guľôčky s polomerom 8,87 mm. Rozdiel medzi r_s a r_G je, že gravitačný polomer sa využíva aj pri rotujúcich čiernych dierach. Vzťah na výpočet použijeme:

$$r_G = \frac{Gm}{c^2} \text{ a } r_s = \frac{2Gm}{c^2} \text{ alebo } r_s = 2r_G$$

4.2 KERROV PARAMETER A KERROV PARAMETER BEZ JEDNOTKY

Kerrov parameter sa označuje ako **a.** Je to dĺžkový pomer momentu hybnosti a hmotnosti čiernych dier. Vypočítame ho ako :

$$a = \frac{J}{mc}$$

Kerrov parameter bez jednotky sa označuje gréckym písmenom chí **χ.** Je to úprava pôvodného Kerrovho parametra a vyjadruje otáčavú vlastnosť čiernej diery. Môže byť v rozmedzí od 0 po 1. Hodnota 0 je pre Schwarzsildovu a 1 je pre maximálne rotujúcu Kerrovu čiernu dieru.

$$\chi = \frac{ac^2}{mG} = \frac{Jc}{m^2G}$$

4.3 HORIZONT UDALOSTÍ

Horizontom udalostí sa pri čiernych dierach označuje sférická oblasť okolo čiernej diery, kde je úniková rýchlosť väčšia ako je rýchlosť svetla. Túto rovnosť môžeme odvodiť zo vzorca pre únikovú rýchlosť. Platí

$$v_u = \sqrt{\frac{2Gm}{r}} \text{ kde } r = r_s = \frac{2Gm}{c^2} \text{ po dosadení } v_u = \sqrt{\frac{2Gm}{\frac{2Gm}{c^2}}} \text{ Po upravení dostaneme } \sqrt{c^2} = \text{c.}$$

Z tohoto vzťahu vyplíva, že všetko musí bezprostredne skončiť v strede čiernej diery. Priestor v tejto oblasti je tak zakrivený, že najkratšia cesta, akou sa môže fotón vydať, je do singularity. Nastáva jav, kde je len jeden bezprostredný smer a to je do stredu. Hovoríme o tom, že trojtozmerný priestor a jednorozmerný čas si vymenili pozície. Priestor sa začne správať ako čas a jediné jeho plynutie je možné smerom dopredu. Je to jeden z dôvodov, prečo nemôžeme vidieť čierne diery, lebo svetlo nemá byť od čoho odrazené. Tento horizont sa označuje r_+ a je možné ho vypočítať všeobecne:

$$r_+ = r_G + \sqrt{{r_G}^2 - a^2 -} \text{ alebo } r_+ = \frac{\mathrm{Gm}}{\mathrm{c}^2} \times \left(1 + \sqrt{1 - \chi^2}\right)$$

Pre Schwarzsildove čierne diery používame upravený vzorec

$$r_+ = r_s = \frac{2Gm}{c^2}$$

Pre maximálne rotujúce Kerrove čierne diery platí vzťah

$$r_+ = r_G = \frac{Gm}{c^2}$$

Je možné vypočítať aj uhlovú rýchlosť pri tomto horizonte, kde platí

$$\omega_{(r+)} = \frac{ac}{a^2 + {r_+}^2}$$

4.4 BONDIHO POLOMER

Nachádza sa vo vnútri horizontu udalostí a je to posledná hranica v čiernej diere, kde Einsteinove rovnice dávajú jeden výsledok. Aj za touto hranicou je časopriestor, ale je veľmi skreslený a naše poznatky z fyziky tu končia. Na výpočet Bondiho polomeru sa používa vzorec

$$r_- = r_G - \sqrt{{r_G}^2 - a^2}$$

Tento výpočet je možný len vtedy, ak máme zadaný moment hybnosti čiernej diery. Ak by sme predpokladali, že a=0 a r_Q=0, tak $\mathbf{r_-}$ bude 0 **.** Ako aj pri horizonte udalostí, tak aj tu, môžeme vypočítať uhlovú rýchlosť prislúchajúcu tomuto polomeru

$$\omega_{(r-)} = \frac{ac}{a^2 + {r_-}^2}$$

4.5 SINGULARITA

Singularitou sa označuje pomyselný stred čiernej diery. Oblasť, kde sa zrúti hviezda, ak sa po hypernove alebo supernove z nej stane čierna diera. Je to nekonečne malý bod s nekonečne veľkou hustotou. Nie je možné určiť, čo sa stane s hmotou, ktorá vstúpi do tohto bodu, lebo nikdy sa nič odtiaľ nedostalo. Dochádza k nekonečnému ohýbaniu časopriestoru. Pri Kerrových čiernych dierach môže v rovniciach vzniknúť anomália známa ako naked singularity (holá singularita). Predpokladá sa však, že holá singularita nemôže nastať. To by znamenalo, že by sme mohli vidieť singularitu a vyžarovala by určitý druh žiarenia. Zároveň by nemala žiadny horizont udalostí. To, že nemá horizont udalostí, môžeme odvodiť cez:

$$r_+ = r_G + \sqrt{{r_G}^2 - a^2}$$

Pre Kerrov parameter platí vzťah:

$$a > r_G$$

Akebo pre moment hybnosti:

$$\frac{Gm}{c^2} \leq \frac{J}{mc} \text{ a po upravení } \quad J > \frac{Gm^2}{c}$$

Ďalej si upravíme

$$r_+ = r_G + \sqrt{{r_G}^2 - a^2} \qquad ({r_G}^2 - a^2) = x$$

A po dosadení dostaneme:

$$r_+ = r_G + \sqrt{-x}$$

Rovnica sa začala správať iracionálne.

4.6 OHÝBANIE ČASOPRIESTORU

Aby sme pozorovali tento jav, musíme mať dva objekty. Jeden sa bude približovať ku singularite a druhý bude mimo účinkov čiernej diery. Pre objekt, ktorý sa približuje ku stredu čiernej diery, sa vnímanie času nebude vôbec meniť a čas bude plynúť úplne normálne. Pre objekt alebo nás ako pozorovateľov sa bude zdať, akoby sa náš objekt v čiernej diere začal spomaľovať a čím bližšie sa priblíži ku stredu čiernej diery, bude čo raz pomalší a pomalší. Po určitom čase sa pre nás ako pozorovateľa úplne zastaví. Pre objekt sa ale nič nezmenilo, on stále vníma čas a priestor rovnako. My ako pozorovatelia budeme vidieť nehybné teleso a v nejakom časovom úseku zmizne. Čo sa však stalo s telesom už môžeme len hádať, pretože v tomto momente prešlo cez horizont udalostí. Ohyb časopriestoru je nerelavisticky možné chápať aj ako pôsobnenie gravitácie. Pri čiernych dierach označujeme túto gravitáciu ako povrchovú gravitáciu horizontu udalostí **κ(kappa)**. Ak by sme ju definovali v zmysle Newtnovského zrýchlenia, tak by sme mohli povedať, že sa rovná rýchlosti svetla. Preto keď počítame **κ,** tak počítame limitnú hodnotu namiesto zrýchlenia vynásobenú faktorom gravitačnej dilatácie času, ktoré je pozorované pozorovateľom v nekonečne (mimo účinkov gravitácie):

$$\kappa = \left(\frac{Gm}{r_g}\right)\left[\frac{r_+ - r_-}{2({r_+}^2 + a^2)}\right]$$

Pre Kerrovu čiernu dieru

$$\kappa = \frac{c^4}{4mG}$$

Pre Schwarzsildovu čiernu dieru bez rotácie

4.7 ENTROPIA

Entropia je miera neusporiadanosti systému a je priamo spätá s množstvom informácii. Ako najčastejší príklad pre entropiu sa používa hrnček kávy. Predstavme si, že máme dva hrnčeky, jeden s mliekom a druhý s čistou kávou. Hrnček s čistou kávou má v tejto svojej forme malú entropiu, lebo na jeho popis nám stačí zadať málo informácií. Akonáhle dáme do hrnčeka mlieko, tak sa káva s mliekom zmiešajú a dostaneme systém s väčšou entropiou. Prečo je entropia väčšia? Lebo je väčšia pravdepodobnosť, že káva a mlieko budú v šálke zmiešané ako perfektne oddelené od seba. Vyplýva to z 2. termodynamického zákona, ktorý hovorí, že entropia uzavretého systému musí vždy rásť alebo byť konštantná . Môže sa stať, že lokálne sa entropia zmenší, ale aj tak je tento zákon zachovaný. Označuje sa ako **S.** Ak si zoberieme ako uzavretý systém vesmír, tak povieme, že entropia vesmíru nemôže klesať. Ak by ale nejaké teleso, ktoré musí mať entropiu, padlo do čiernej diery a čierna diera by túto entropiu nemala znamenalo by to porušenie 2. termodynamického zákona. Preto čierne diery musia mať entropiu, ktorú vypočítame vzťahom

$$S = \frac{k_\beta A}{4{l_p}^2}$$

Vzťah je všeobecný pre Kerrovu aj pre Schwarzsildovu čiernu dieru. Vo vzťahu používame povrch čiernej diery s použitím nasledujúceho výpočtu:

$$A = 4\pi({r_+}^2 + a^2)$$

Ak chceme tento vzťah upraviť pre Schwarzsildovu čiernu dieru použijeme

$$a = 0 \quad r_+ = r_s$$

$$A = 4\pi {r_s}^2$$

Všetko nasvedčuje tomu, že entropia čiernej diery sa nachádza na povrchu a nie v jej objeme. Ďalej použijeme Plankovu dĺžku

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$$

Predstavuje najmenšiu možnú dĺžku vo vesmíre, čím si čiernu dieru rozdelíme na miniatúrnu jednotkovú plochu.

$$\frac{A}{l_p}$$

Celý vzorec vynásobíme Boltzmanovou konštantou

$$\frac{k_B A}{l_p}$$

Ktorá predstavuje distribúciu atómov v určitých energetických hladinách. Hawking dokázal Bekeinsteinovu teóriu a dosadil do vzorca konštantu proporcionality, čo pre čierne diery je $\frac{1}{4}$

$$\frac{k_B A}{4 l_p}$$

Výsledok určuje, v koľkých možných stavoch sa môže nachádzať informácia na povrchu čiernej diery, čo predstavuje veličina entropia.

4.8 PHOTON SPHERE RADIUS

Je to región pri čirenych dierach, kde je gravitácia dostatočne silná na to, aby fotóny museli čiernu dieru obiehať v sférických orbitáloch. Vzorce pre photon sphere radius je všeobecný:

$$r_{PS} = \frac{2Gm}{c^2}\left\{1 + \cos\left[\frac{2}{3} arcos(\pm\chi)\right]\right\}$$

Kde - **χ** je pre obeh v protismere a + **χ** v smere rotácie čiernej diery. Úpravou po dosadení $\chi = 0$ je vzorec pre Schwarzsildovu čiernu dieru

$$\frac{3Gm}{c^2} = \frac{3r_s}{2} = r_{PS}$$

4.9 ERGOSFÉRA

Ergosféra sa delí na vnútornú a vonkajšiu **r_{0-}** a **r_{0+}.** Vypočítavame ju pre Kerrovu čiernu dieru a nachádza sa okolo čiernej diery**.** Medzi vonkajšou a vnútornou ergosférou sa náchadza priestor so zaujímavým javom. Jeho názov je po anglicky Frame dragging. Predstavuje ohyb časopriestoru pri rotujúcom telese. Pri čiernych dierach sa prejavuje tak, že akékoľvek teleso (alebo častica), ktorá vstúpi do tejto oblasti, je nútená obiehať čiernu dieru v smere jej rotácie. Ani fotón nedokáže odolať účinkom čiernej diery a je nútený pohybovať sa v smere jej rotácie. Ak sa fotón dostane presne na okraj vonkajšej ergosféry a má opačný smer ako je smer rotácie čiernej diery, tak v tomto prípade zostane fotón stacionárny (nehybný). Rýchlosť fotónu a rýchlosť rotácie sa vynulujú. Predpokladá sa, že by bolo možné extrahovať energiu práve z tejto oblasti. Vzťah na výpočet je

$$r_{0\pm} = r_G \pm \sqrt{{r_G}^2 - a^2cos^2(\theta)}$$

kde mínus je pre vnútornú ergosféru a plus je pre vonkajšiu. Tak isto je v tomto vzťahu používa **θ,** čo v našom prípade používame ako sklon čiernej diery. Môže sa stať špeciálny prípad, ak by sme mali sklon **θ=90°**

$$r_{0\pm} = r_G \pm \sqrt{{r_G}^2 - a^2cos^2(90)} = r_G \pm \sqrt{{r_G}^2} = r_G \pm r_G$$

$$r_{0-} = r_G - r_G = 0$$

$$r_{0+} = r_G + r_G = 2r_G = r_s$$

Ďalšia špeciálna verzia tohoto vzorcu nastane keď **θ**=**0°**

$$r_{0\pm} = r_G \pm \sqrt{{r_G}^2 - a^2cos^2(0)}$$

$$r_{0\pm} = r_G \pm \sqrt{{r_G}^2 - a^2} \quad r_{\pm} = r_G \pm \sqrt{{r_G}^2 - a^2}$$

$$r_{0-} = r_- \text{ a } r_{0+} = r_+$$

Vzorec sa upraví na vzorec pre výpočet Cauchyho horizontu (r_-) a horizontu udalostí (r_+).

4.10 INERMOST STABLE CIRCULAR ORBIT RADIUS (ISCO)

r_{ISCO}- ISCO alebo innermost stable circular orbit radius. Predstavuje najmenší možný polomer sférického obehu okolo čiernej diery. Gravitačné účinky čiernej diery sú tu natoľko slabé, že masívna častica môže okolo nej stabilne obiehať. Výpočet sa rozdeľuje pre Schwarzsildove čierne diery:

$$r_{ISCO} = 3r_S = \frac{6mG}{c^2}.$$

Pre Kerrove čierne diery:

$$\boldsymbol{r_{ISCO} = \frac{Gm}{c^2}\left[3 + Z_1 + \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)}\right]}$$

$$\boldsymbol{Z_1 = 1 + (1 - \chi^2)^{\frac{1}{3}}\left[(1 + \chi)^{\frac{1}{3}} + (1 - \chi)^{\frac{1}{3}}\right]}$$

$$\boldsymbol{Z_2 = \left(3\chi + {Z_1}^2\right)^{\frac{1}{2}}.}$$

4.11 BONDIHO POLOMER

Bondiho polomer je polomer sférického pôsobenia gravitácie čiernych dier, kde úniková rýchlosť nie je rýchlosť svetla **c,** ale rýchlosť zvuku pri 273,15 K- **c_s** . Tento polomer predstavuje hranicu medzi podzvukovým a nadzvukovým voľným pádom do stredu čiernej diery. Vzťah pre jeho výpočet je

$$r_B = \frac{\mathrm{Gm}}{{c_S}^2} \times \left(1 + \sqrt{1 - \chi^2}\right)$$

Tento vzorec je skoro totožný vzorcu pre výpočet horizontu udalostí. Jediný rozdiel je v definovaní únikovej rýchlosti.

5 ZÁNIK ČIERNYCH DIER

Zatiaľ jediným známym javom, pri ktorom zanikajú čierne diery je Hawkingovo žiarenie alebo aj vyparovanie čiernych dier. Zatiaľ nie je dokázané experimentom. Je podložené len logikou a predpokladmi. Na to, aby sme pochopili ako funguje Hawkingove žiarenie, musíme najskôr pochopiť, že v bežnom prostredí vznikajú páry častíc a antičastíc. Tieto častice môžu byť napríklad elektrón-pozitrón, protón-antiprotón, kvark-antikvark atď., ktoré hneď po vzniku zanikajú. Hawking si uvedomil, že ak takýto pár vznikne na prelome horizontu udalostí, tak je možné, že jedna častica bude pohltená čiernou dierou a druhá sa dostane mimo horizont udalostí. To by však znamenalo, že je porušený zákon horizontu udalostí. Ten hovorí o nemožnosti čohokoľvek opustiť horizont udalostí. Ak by to bolo možné a táto teória by bola pravdivá, znamenalo by to, že čierna diera vyžaruje energiu. Tomuto vyžarovaniu je možné priradiť svietivosť

$$\mathrm{P} = \sigma_{sb} A {T_H}^4$$

P je svietivosť, ktorú dosahuje Hawkingovo žiarene pri teplote $\mathbf{T_H}$. **T**ento vzorec je všeobecný pre Kerrovu aj pre Schwarzsildovu čiernu dieru. Pre Schwarzsildovu čiernu dieru je možné upraviť vzorec

$$P = \frac{\hbar c^6}{15360 \pi G^2 m^2}$$

$\mathbf{T_H}$ je teplota tohoto žiarenia. T_H je teplota absolútne čierneho telesa, pri ktorej čierna diera vyžaruje Hawkingovo žiarene kvôli kvantový procesom. Platí všeobecný vzťah ako pre Kerra tak aj pre Schwarzsilda:

$$T_H = \left(\frac{\hbar \mathrm{c}}{4\pi k_B}\right)\left(\frac{\sqrt{{r_G}^2 - a^2}}{{r_G}^2 + r_G\sqrt{{r_G}^2 - a^2}}\right)$$

Pre Schwarzsildovu čiernu dieru môžeme použiť upravený vzorec

$$T_H = \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G m}\right)$$

Stefan-Boltzmannovu konštantu sme použili kvôli tomu, že predstavuje pomer žiarivosti jednotkovej plochy kompletne čierneho telesa a štvrtej mocniny jeho absolútnej teploty(ktorú v našom prípade predstavuje $\mathbf{T_H}$):

$$\sigma_{sb} = \frac{2\pi^5 {k_B}^4}{15h^3c^2}$$

Nakoniec môžeme vypočítať aj čas, za ktorý sa Schwarzsildova čierna diera cez proces Hawkingovho žiarenia úplne vyparí

$$t_{SCH} = 5120\pi \times \frac{G^2m^3}{1{,}8083\hbar c^4}$$

Číselný faktor 1,8083 sme pridali kvôli predpokladu, že nie všetklo žiarenie je vyžiarené cez fotóny, ale môžu sa vyžiariť aj iné častice, napríklad neutrína a podobne. Môže sa výpočet použiť aj bez číselného faktora za predpokladu vyžiarenia 100% fotónov. V praktickej časti budem pre Kerrovu čiernu dieru používať tento istý vzorec, aby som mohol zadať aspoň orientačný výsledok, pretože pre Kerrovu čiernu dieru sa mi nepodarilo nájsť úpravu tohoto vzorca.